Concepto de ecuación lineal con una incógnita

OBJETIVO: Comprender el concepto de ecuación lineal en sus distintas representaciones.

Recordemos

ECUACIÓN

Una ecuación es una igualdad que contiene una o más incógnitas, los cuales se suelen representar con letras.

Ejemplos

a) $3\mathrm{x}+5=11$

b) $4(\mathrm{m}+\mathrm{e})-9=3\mathrm{h}$

c) $\mathrm{w}^2-4=\mathrm{w}+16$

ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA

Una ecuación lineal con una incógnita es aquella que contiene solo una única incógnita, la cual tiene exponente 1. Estas ecuaciones son de la forma $\mathbf{ax}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$, con $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ números racionales y $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}.$

Ejemplos

a) $3\mathrm{t}+5=11$ donde $a=3;\ b=5;\ c=11$

b) $\frac{\mathrm{y}}{2}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$ donde $a=\frac{1}{2};\ b=\frac{3}{4};\ c=\frac{9}{4}$

c) $3\mathrm{p}-2=19$ donde $a=3;\ b=-2;\ c=19$

d) $7\mathrm{m}=21$ donde $a=7;\ b=0;\ c=21$

Observación: Las incógnitas de una ecuación se representan con letras minúsculas.

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

1. Propiedad reflexiva: La propiedad reflexiva de la igualdad se asocia a $\boldsymbol{x = x}$.
   Ejemplos: $4 = 4, 12 = 12$.

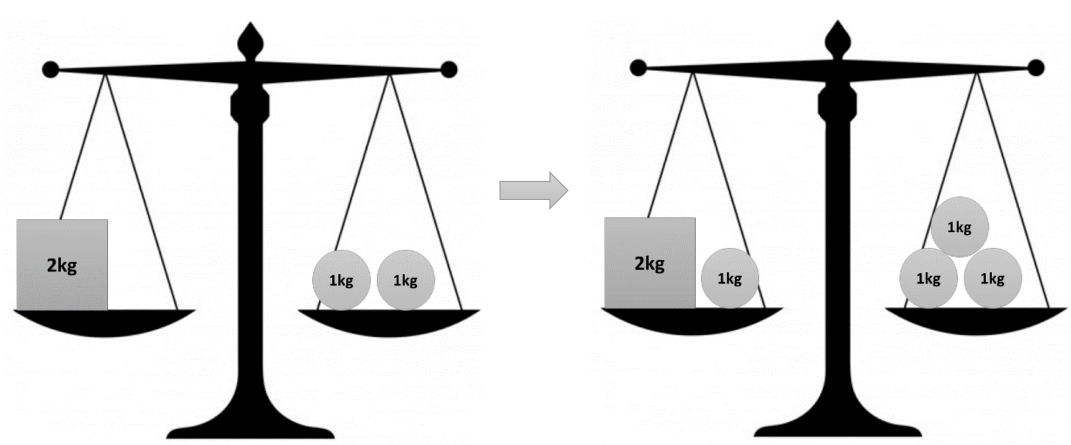
2. Propiedad simétrica: La propiedad simétrica de la igualdad dice que **si $\boldsymbol{x = y}$, entonces $\boldsymbol{y = x}$.**
   Ejemplo: $x = 3$ entonces $3 = x$.

3. Propiedad transitiva: La propiedad transitiva de la igualdad establece que **si $\boldsymbol{x = y}$** e **$\boldsymbol{y = z}$, entonces $\boldsymbol{x = z}$.**
   Ejemplo: Si sabemos que el precio de un paquete de galletas es igual al precio de una cajita de jugo y que el precio de una cajita de jugo es $350 pesos, entonces el precio del paquete de galletas también es $350.

4. Propiedad sustitutiva: La propiedad sustitutiva de la igualdad indica que, si conocemos el valor de una incógnita, este valor puede ser sustituido en cualquier ecuación.
   Ejemplo: Si $x = 3$ y $x + 5 = y$, entonces sustituyendo el valor de x, obtenemos:
   $$3 + 5 = y$$

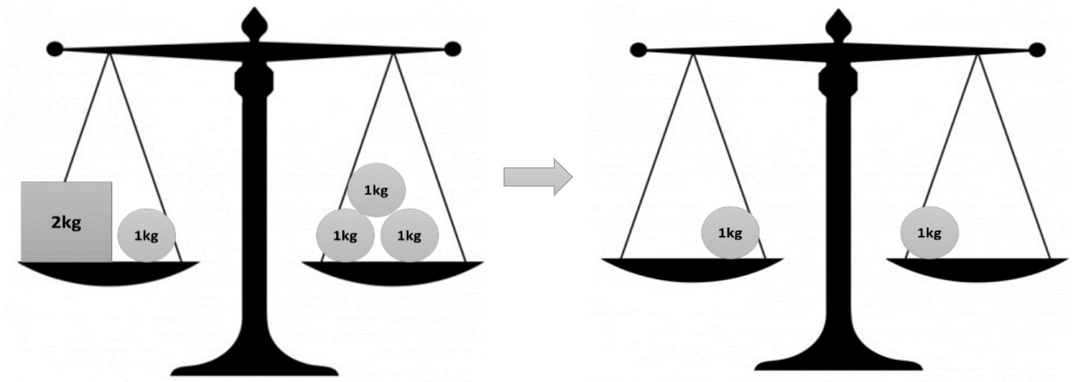
5. Propiedad de adición: La propiedad de la igualdad de la adición establece que **si $\boldsymbol{x = y}$, entonces $\boldsymbol{x + z = y + z}$.** Es decir, si se suma la misma cantidad a ambos lados de una igualdad, esta se mantiene.

   Ejemplo: La siguiente balanza se mantiene en equilibrio cuando existe una igualdad entre los pesos a cada uno de sus lados. El cuadrado pesa 2kg y cada círculo pesa 1kg. ¿Qué ocurre con el equilibrio de la balanza si agrego 1kg a cada lado de la balanza?, ¿se mantiene o cambia?



   ¡Sí! Se mantiene ya que, al **agregar el mismo peso** a ambos lados, se mantiene igual peso a ambos lados.

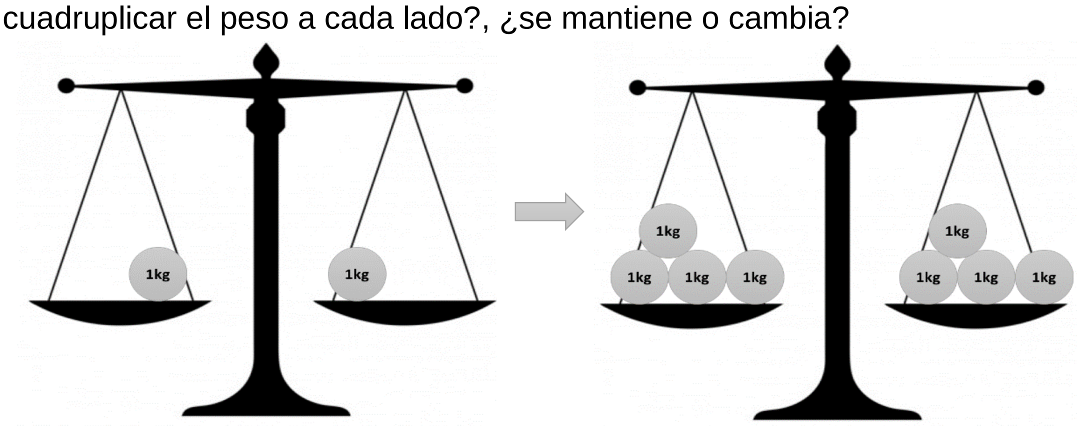
6. Propiedad de sustracción: La propiedad de la igualdad de la sustracción establece que **si $\boldsymbol{x = y}$, entonces $\boldsymbol{x - z = y - z}$.** Es decir, al restar la misma cantidad a ambos lados de una igualdad, esta se mantiene.
   Ejemplo: Observa la siguiente balanza. ¿Qué ocurre con el equilibrio de esta al quitar 2kg de peso a cada lado?, ¿sigue en equilibrio?



¡Sí! Sigue en equilibrio porque al **quitar el mismo peso** de ambos lados, sigue habiendo igual peso a ambos lados.

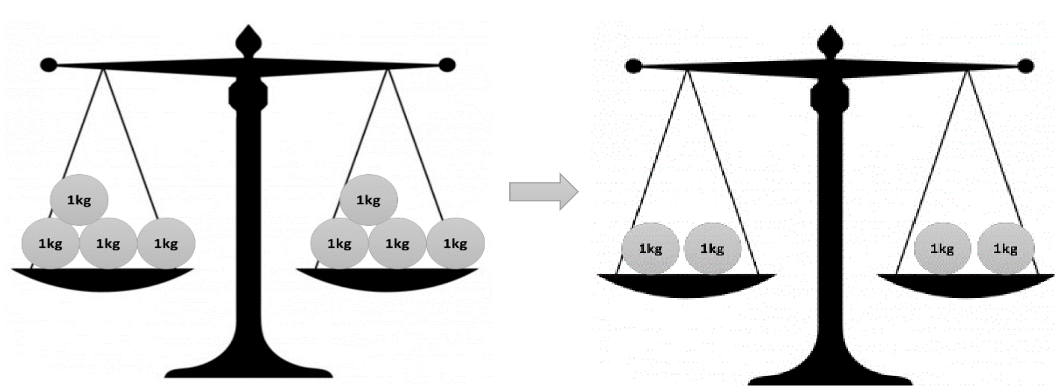
7. Propiedad de multiplicación: La Propiedad de la igualdad de la multiplicación establece que **si** $x = y$ **entonces** $x \cdot z = y \cdot z$. Es decir, al multiplicar por la misma cantidad a ambos lados de una igualdad, esta se mantiene.

   Ejemplo: Observa la siguiente balanza. ¿Qué ocurre con el equilibrio, al cuadruplicar el peso a cada lado?, ¿se mantiene o cambia?



   ¡Sí! Se mantiene ya que, al **cuadruplicar el peso** de ambos lados, sigue habiendo igual peso a ambos lados.

8. Propiedad de división: La propiedad de la igualdad de la división establece que **si** $x = y$ **entonces** $x : z = y : z$. Es decir, al dividir en la misma cantidad a ambos lados de una igualdad, esta se mantiene.
   Si usamos fracciones y tenemos que $x = y$, **entonces** $\frac{x}{z} = \frac{y}{z}$.
   Ejemplo: Observa la siguiente balanza. ¿Qué ocurre con el equilibrio si hacemos una acción tal que ahora tenemos la mitad del peso inicial a ambos lados?, ¿se mantiene?



   ¡Sí! Se mantiene ya que, al **dividir el peso** de ambos lados, sigue habiendo igual peso a ambos lados.

En conclusión: Si sumamos o restamos una misma cantidad a ambos lados de una igualdad, esta se mantiene. Lo mismo ocurre si multiplicamos o dividimos por la misma cantidad a ambos lados.

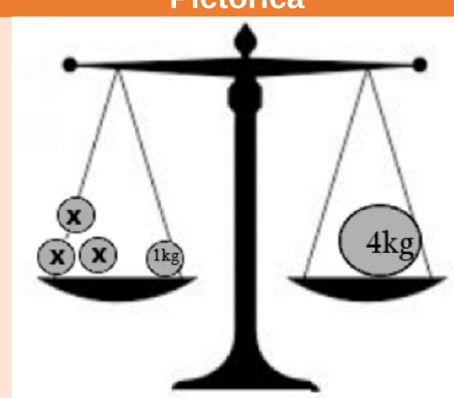
Observación: Para resolver una ecuación lineal con una incógnita, hay que encontrar el valor de la incógnita que satisface la igualdad, despejando la incógnita.

REPRESENTACIÓN PICTÓRICA Y CONCRETA DE UNA ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA

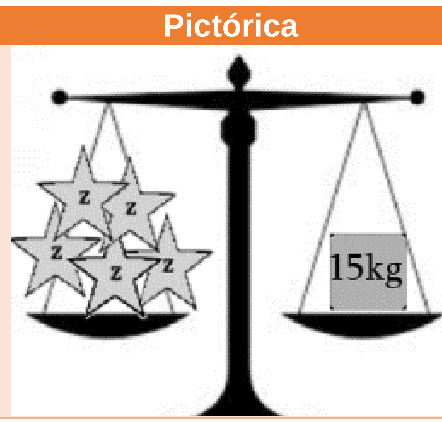
Las ecuaciones lineales de primer grado permiten representar diversas situaciones de la vida cotidiana. Si estas ecuaciones las presentamos de forma pictórica, podemos hacerlo con una balanza en **equilibrio**.

Ejemplos

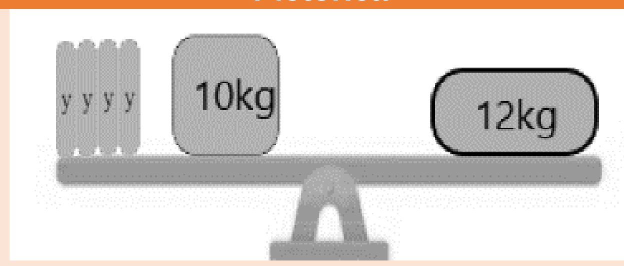
1. La ecuación lineal con una incógnita $3x + 1 = 4$, se puede representar a través de una igualdad (como la que aparece a la izquierda) o con una balanza.

Simbólica	Pictórica
$\square+\square+\square+1=4$	

2. La ecuación lineal con una incógnita $5z = 15$, se puede representar a través de una igualdad o con una balanza.

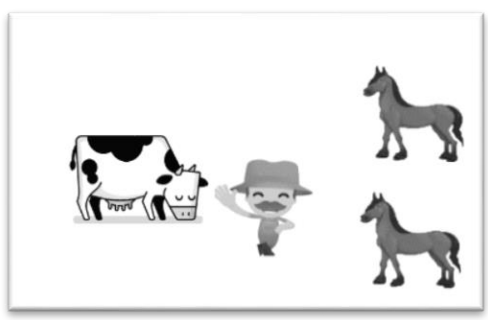
Simbólica	Pictórica
$\square+\square+\square+\square+\square=15$	

3. La ecuación lineal con una incógnita $\mathbf{4y + 10 = 12}$, se puede representar a través de una igualdad o con una balanza.

Simbólica	Pictórica
□+□+□+□ +10=12	

Observación: Es importante mencionar que, si bien las balanzas y los balancines son formas típicas de representar ecuaciones lineales de forma pictórica, también existen otras. Una de ellas es la representación con un dibujo de una acción donde haya un trueque.

Ejemplo: En un pueblo al sur de Chile, un comerciante hace trueques de animales. Él decide que un caballo lo puede cambiar por 2 ovejas y una vaca por 2 caballos.



Práctica

I. Identifique si las siguientes ecuaciones dadas son lineales con una incógnita, escribiendo con un sí o un no, según corresponda. Justifique su respuesta.

Ecuación	Lineal con una incógnita	Justificación
a) $x - 70y = 89$		
b) $10 + 2x = 62$		
c) $6x - 7 + 4x = 13$		
d) $z + 21 - z = 21$		
e) $y + 41 + 2z - 31 - 2z = 33$		
f) $x + 3x(x - 4) = 12$		

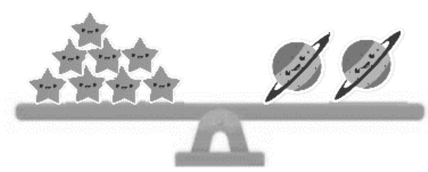
II. Complete el siguiente recuadro, representando cada balanza en equilibrio con una ecuación o dibujando cada balanza equilibrada, según la ecuación dada.

Ecuación	Balanza
a)	
b) $6x = 24$	

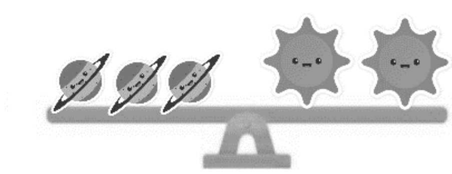
c)	
d) $\mathbf{2y + 9 = 10}$	
e) $\mathbf{z + 5 = 12}$	

Desafío

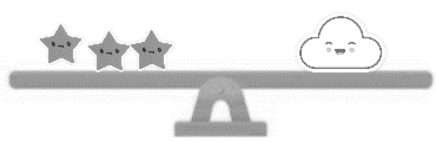
Observa las siguientes 4 balanzas (a, b, c y d) y señale cuántas nubes se necesitan para mantener en equilibrio la balanza d).



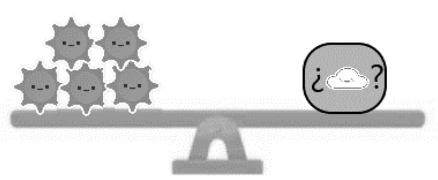
a)



b)



c)



d)

MODELAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

OBJETIVO: Resolver una ecuación lineal con una incógnita.

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Una expresión algebraica es la suma o resta de dos o más términos algebraicos. Hay que recordar que las letras representan variables y las expresiones algebraicas se pueden escribir en lenguaje natural.

Ejemplo:

Expresión algebraica	Lenguaje natural
$x-7$	Un número cualquiera disminuido en siete
$1-2y$	Uno disminuido en el doble de un número
$x+5$	Un número aumentado en cinco
$\frac{x}{3}-10$	La tercera parte de un número disminuido en diez

ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA

Una ecuación lineal con una incógnita es aquella que contiene solo un valor incógnito, el cual tiene exponente 1. Estas representan una igualdad como se menciona en la primera ficha.

MODELAMIENTO DE ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA A PARTIR DE ENUNCIADO CONTEXTUALIZADO.

Para modelar la información entregada en lenguaje natural a lenguaje algebraico, es necesario relacionar algunas palabras claves del lenguaje común, con las cuatro operaciones.

Operaciones	$+$	$-$	$\cdot$	$:$
Palabras claves	• Más • Aumentado • Agregado	• Menos • Diferencia • Disminuido	• Producto • Doble • Triple	• Cociente • Mitad • Quinta parte

Será necesario ordenar los datos del enunciado contextualizado para poder resolver el problema y para esto proponemos los siguientes pasos:

1) Definir incógnita
2) Plantear la ecuación
3) Resolver la ecuación
4) Verificar
5) Responder la pregunta planteada en el problema

Ejemplo

Modelemos una ecuación para el siguiente problema y luego resolvámoslo.

"Fernanda tiene el doble de la edad de su primo Santiago. Si sus edades suman 72 años, ¿qué edad tiene Santiago?"

1) **Definir la incógnita:** En el enunciado nos preguntan *"¿qué edad tiene Santiago?"*, por lo tanto, su edad será la incógnita de nuestra ecuación. Es decir:

La edad de Santiago → x

Además, se indica "*Fernanda tiene el doble de la edad de su primo Santiago*", entonces:

La edad de Fernanda → $2x$

2) **Plantear la ecuación:** Debemos encontrar qué parte del enunciado nos permite establecer una igualdad utilizando la incógnita. En este caso, *"Sus edades suman 72 años"*, nos permite plantear:

$$2x + x = 72$$

La edad de Fernanda y la edad de Santiago suman 72 años

3) **Resolver la ecuación:**

$2x + x = 72$ ⟶ *Reducimos términos semejantes*

$3x = 72$ ⟶ *Dividimos por 3 a cada lado de la igualdad (Propiedad de la división)*

$3x : 3 = 72 : 3$

$x = 24$ ⟶ *Obtenemos el valor que satisface la igualdad*

4) **Verificar:**

Como el resultado de nuestra incógnita nos da igual a 24 se debe reemplazar en la ecuación planteada en un comienzo.

$2x + x = 72$ ⟶ *Escribir la ecuación inicial*

$2 \cdot 24 + 24 = 72$ ⟶ *Reemplazar la incógnita x por 24*

$48 + 24 = 72$ ⟶ *Resolver la multiplicación y luego la adición*

$72 = 72$ ⟶ *Se obtiene una igualdad correcta entre dos números (propiedad reflexiva)*

5) **Responder la pregunta planteada en el problema:**

¿qué edad tiene Santiago?

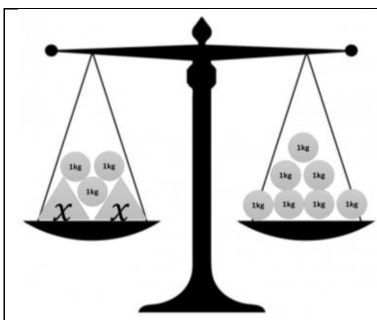
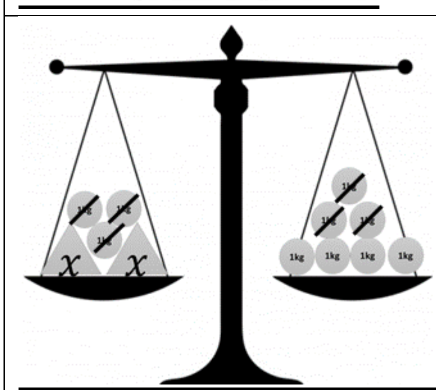
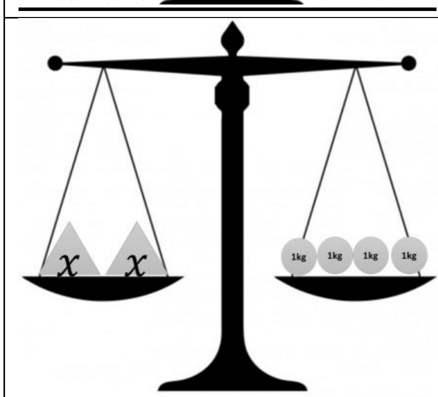
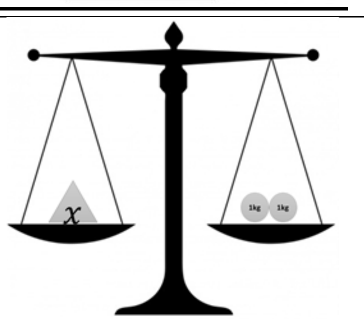
Santiago tiene 24 años.

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA

Para resolver una ecuación lineal con una incógnita, hay que encontrar el valor de la incógnita que satisface la igualdad. Para ello, debemos despejar la incógnita, por lo que se hace necesario la utilización de las **propiedades de la igualdad (**reflexiva, simétrica, transitiva, sustitutiva, de adición, de sustracción, de multiplicación o de división).

Ejemplos:

a) Observa la siguiente balanza, en la que cada círculo pesa 1kg y el peso de cada triángulo es desconocido. Responde: ¿Cuál es el peso de un triángulo?

	Lo que debemos hacer es solo un triángulo a uno de los lados de la balanza, para ello:
	Quitamos 3kg en cada lado de la balanza.
	Así, mantenemos en equilibrio y dejamos solamente los triángulos en el lado izquierdo.
	Al ver que tenemos dos triángulos del mismo peso, que en total pesan 4 kg, podemos darnos cuenta que el peso de un triángulo debe ser 2 kg.

Finalmente,

¿Cuál es el peso del triángulo?
El peso del triángulo es 2kg.

b) Resolvamos la ecuación $2x+3=7$, que modela lo representado previamente en la balanza, utilizando las propiedades de la igualdad.

$2x+3=7$

$2x+3-3=7-3$ → *Restamos 3 a ambos lados de la igualdad*

$2x=4$

$2x:2=4:2$ → *Dividimos por 2 a ambos lados de la igualdad*

$x=2$ → *Obtenemos el valor que satisface la igualdad*

¿Cómo sabemos que $x=2$ es correcto?

Para que la respuesta sea correcta, el valor encontrado debe satisfacer la igualdad:

$$2\cdot 2+3=7$$

Comprobemos:

$2x+3=7$ → *Si $x=2$, utilizando la propiedad sustitutiva*

$2\cdot 2+3=7$

$4+3=7$

$7=7$ → *Esta igualdad es correcta, por lo tanto, se comprueba que x=2 es la respuesta correcta.*

c) Resolvamos la ecuación $\frac{y}{2}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$.

Al haber fracciones, este ejercicio se puede resolver al menos de dos maneras distintas.

I. Operando las fracciones

$$\frac{y}{2}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

$$\frac{y}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}-\frac{3}{4}$$ → *Restamos $\frac{3}{4}$ en ambos lados de la igualdad*

$$\frac{y}{2}=\frac{6}{4}$$ → *Multiplicamos por 2 en ambos lados de la igualdad*

$$\frac{y}{2}\cdot 2=\frac{6}{4}\cdot 2$$

$$\frac{2y}{2}=\frac{12}{4}$$

$$y=3$$ → *Obtenemos el valor que satisface la igualdad*

II. Utilizando el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores, para trabajar solo con números enteros.

$\frac{y}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \quad / \cdot 4$ ⟶ *Utilizamos el mcm entre los denominadores de las fracciones (2 y 4)*

$\frac{y}{2} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{9}{4} \cdot 4$ ⟶ *Multiplicamos cada término por el mcm (2,4) =4*

$\frac{4y}{2} + \frac{12}{4} = \frac{36}{4}$

$2y + 3 = 9 \quad / - 3$

$2y + 3 - 3 = 9 - 3$ ⟶ *Restamos 3 en ambos lados de la igualdad*

$2y = 6 \quad / : 2$

$\frac{2y}{2} = \frac{6}{2}$ ⟶ *Dividimos en 2 en ambos lados de la igualdad*

$y = 3$ ⟶ *Obtenemos el valor que satisface la igualdad*

Verificamos que $y = 3$ sea el resultado correcto

$\frac{y}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ ⟶ *Si $y = 3$, utilizando la propiedad sustitutiva*

$\frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

$\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ ⟶ *Amplificamos para igualar denominadores*

$\frac{6}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

$\frac{9}{4} = \frac{9}{4}$ ⟶ *Esta igualdad es correcta, por lo tanto, se comprueba que y=3*

<u>Método abreviado</u>

El método abreviado para resolver ecuaciones nos permite encontrar la solución utilizando las mismas propiedades, pero con menos pasos. El objetivo sigue siendo encontrar el valor de la incógnita, por lo que necesitamos despejarla. Volvamos a revisar el ejemplo **b)** con ambos métodos.

Método Tradicional

$2x + 3 = 7$

$2x + 3 - 3 = 7 - 3$ ⟶ *Restamos 3 a ambos lados de la igualdad*

$2x = 4$

$(2x): 2 = 4: 2$ ⟶ *Dividimos por 2 en ambos lados de la*

$x = 2$ ⟶ *Obtenemos el valor que satisface la igualdad*

Método Abreviado

$2x + 3 = 7$

$2x = 7 - 3$ ⟶ *Restamos a ambos lados 3 y solo mostramos en el paso siguiente la resta de la derecha, pues a la izquierda resultó 3 - 3 = 0*

$2x = 4$

$x = \frac{4}{2}$ ⟶ *Dividimos a ambos lados por 2 y solo mostramos en el paso siguiente la división de la derecha, ya que a la izquierda la división dio resultado 1, y 1·x=x*

$x = 2$ ⟶ *Obtenemos el valor que satisface la igualdad*

Ejemplo

Resolvamos la ecuación $10x + 8 = 3(x - 5)$

Antes de resolver esta ecuación, vemos que no se presenta en la forma general $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ **,** por lo tanto, para que su resolución sea más sencilla, la escribiremos de esa forma, utilizando las propiedades y luego resolveremos.

$10x + 8 = 3(x - 5)$

$10x + 8 = 3x - 15$

$10x - 3x + 8 = -15$ ⟶ *Restamos a ambos lados 3x y solo mostramos en el paso siguiente la resta de la izquierda, pues a la derecha 3x -3x = 0.*
En el siguiente paso, reducimos términos semejantes.

$7x + 8 = -15$ ⟶ *Obtenemos una ecuación en la forma general* $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ ***.***
En este caso: $\boldsymbol{a} = \mathbf{7}, \boldsymbol{b} = \mathbf{8}$ ***y*** $\boldsymbol{c} = \mathbf{-15}$

Seguimos resolviendo:

$7x + 8 = -15$

$7x = -15 - 8$ ⟶ *Restamos 8 a ambos lados y solo mostramos en el paso siguiente la resta de la derecha, pues a la izquierda 8 - 8 = 0.*

$7x = -23$

$x = \frac{-23}{7}$ ⟶ *Dividimos a ambos lados por 7 y solo mostramos en el paso siguiente la división de la derecha, ya que a la izquierda la división dio resultado 1, y 1·x=x*

Luego de obtener nuestro resultado, se recomienda la verificación de este.

b) Modelemos una ecuación para el siguiente problema y luego resolvámoslo con el método abreviado.

"Una prueba de química tiene 20 preguntas. Por cada pregunta bien contestada se suman tres puntos y por cada respuesta incorrecta se restan dos. ¿Cuántas preguntas acertó Elena sabiendo que ha obtenido 30 puntos y que contestó todas?"

1° **Definir la incógnita:**

Total de preguntas=20
Preguntas acertadas $= x$
Preguntas no acertadas $= (20 - x)$
Puntaje por sus respuestas correctas $= 3x$
Puntaje por sus respuestas incorrectas $= 2(20 - x)$

2° Plantear ecuación:

$$3x - \underbrace{2(20 - x)}_{\text{Se quita puntaje por respuestas incorrectas}} = 30$$

Puntaje por respuestas correctas

Puntaje total

Una vez planteada la ecuación, la expresamos en la forma general para facilitar su desarrollo.

$3x - 2(20 - x) = 30$ → *Multiplicamos*

$3x - 40 + 2x = 30$ → *Reducimos términos semejantes*

$5x = 30 + 40$ → *Sumamos 40 a ambos lados*

$5x = 70$

3° Resolver ecuación:

Método Abreviado

$5x = 70$ → *Dividimos a ambos lados por 5 y solo mostramos en el paso siguiente la división de la derecha, ya que a la izquierda la división dio resultado 1, y 1·x=x*

$x = \frac{70}{5}$

$x = 14$ → *Obtenemos el valor que satisface la igualdad*

4° Verificar:

$5x = 70$ → *Escribimos la ecuación*

$5 \cdot 14 = 70$ → *Remplazamos la incógnita x por 14 y resolvemos la multiplicación*

$70 = 70$ → *La igualdad es correcta.*

5° Responder la pregunta planteada en el problema:

¿Cuántas preguntas acertó Elena?

Elena acertó a 14 preguntas

Práctica

1) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x - 3 = 5$

b) $3a + 8 = 14$

c) $5m - 2 = 4m + 1$

d) $\frac{3}{5}p + \frac{4}{5} = 5$

e) $\frac{1}{4}s + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}s - 1$

2) Resuelve los siguientes problemas con los 5 pasos explicados

a) Si un número más el doble de su antecesor suman 43, ¿cuál es el número?

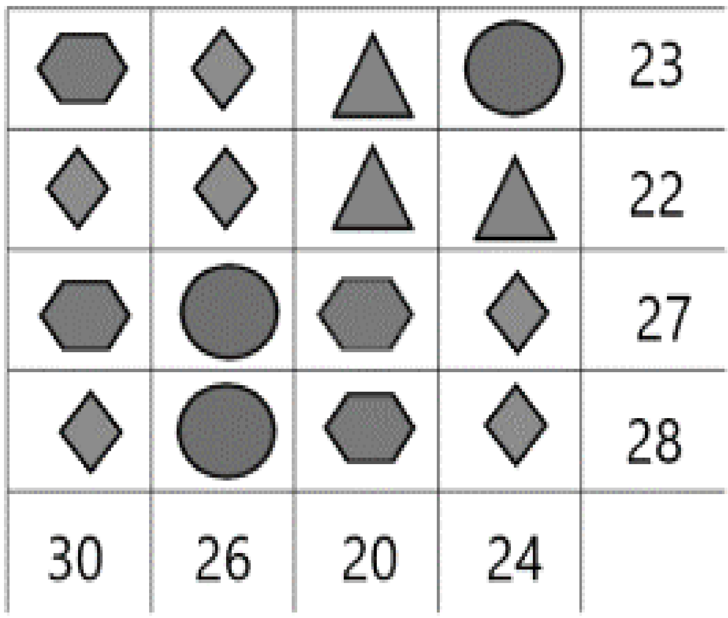
b) El perímetro de un rectángulo es 54 cm. Si su largo mide el doble que su ancho, ¿cuántos centímetros mide el largo del rectángulo?

c) Julieta fue al almacén a comprar un encargo de su mamá, quien le pasó $5 000 para pagar. Ella compró 1 kg de pan y $\frac{1}{4}$ kg de queso. Si 1 kg de queso cuesta $8 000 y ella recibió $1 800 de vuelto, ¿cuánto cuesta 1kg de pan en ese almacén?

Desafío

Aplica lo presentado anteriormente para la resolución de las siguientes actividades.

1) En las siguientes figuras las cifras han sido reemplazadas por símbolos. Cada símbolo representa siempre la misma cifra. Debajo de cada columna y al costado derecho de cada fila, aparece el total obtenido por las sumas (adiciones) de las cifras de cada celda del cuadro que puedes observar a continuación:



Si  = 7 y  = 8, ¿cuáles son los valores de los demás símbolos?