TIPOS DE POTENCIAS

OBJETIVO: Recordar los tipos de potencias y sus características.

Recordemos

POTENCIA DE BASE Y EXPONENTE NATURAL

Una potencia de base a y exponente n se define para $a\ y\ n \in \mathbb{N}$ como la multiplicación iterada de a la cantidad de veces que indica n:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n veces}}$$

Ejemplo: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

POTENCIA DE BASE Y EXPONENTE ENTERO

En la potencia a^n con $a\ y\ n \in \mathbb{Z}$ se tienen los siguientes casos:

a) Potencia de base un número negativo:

Una potencia cuya base es negativa da como resultado un número mayor que cero si su exponente es un **número par**.

Ejemplo: $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

Una potencia cuya base es negativa da como resultado un número menor que cero si su exponente es un **número impar**.

Ejemplo: $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

Importante: Cuándo la base de una potencia es negativa se escribe con paréntesis $(-\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}}$, de este modo se entiende que el número negativo es el que se repite n veces. En caso de no haber paréntesis $-\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}$ se entiende que la base es positiva y que el signo negativo corresponde a la potencia, es decir, al resultado.

$$(-\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}} \neq -\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}$$

Ejemplos:

1) Con n par:	2) Con n impar:
$(-3)^4 = -3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3 = 81$ $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$ $81 \neq -81$ $(-3)^4 \neq -3^4$	$(-3)^3 = -3 \cdot -3 \cdot -3 = -27$ $-3^3 = -(3 \cdot 3 \cdot 3) = -27$ Si bien se obtiene el mismo resultado, el procedimiento es distinto.

En resumen: En la potencia a^n si a $\in \mathbb{Z}^-$ y n $\in \mathbb{N}$ se tiene que:

- Si n es par, entonces $a^n > 0$
- Si n es impar, entonces $a^n < 0$

b) Potencia de exponente un número negativo:

El valor de potencia de base entera distinta de cero cuyo exponente es negativo será igual al inverso multiplicativo de la base de la potencia con exponente positivo.

Ejemplos:

1) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$
2) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$ (la base también puede ser un número negativo)

En resumen: En la potencia a^n si a $\in \mathbb{Z} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

POTENCIA DE BASE RACIONAL Y EXPONENTE ENTERO

a) Potencia con exponente positivo:

Una potencia de base racional y exponente entero positivo se define como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{\text{n veces}} = \frac{a^n}{b^n} \qquad ; \text{Con } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}\ y\ n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{27}$$

b) Potencia con exponente negativo:

Una potencia de base racional y exponente negativo es equivalente al inverso multiplicativo de la base con exponente positivo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \qquad ; \text{Con } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}\ y\ n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{5^4}{4^4} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{625}{256}$$

En resumen: Sea $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ la base de una potencia y $n \in \mathbb{N}$ el exponente, se tiene:

- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; b \neq 0$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ con $a \neq 0, b \neq 0$

COLEGIO OLIVAR COLLEGE
Subsector: Matemática
Nivel: 2° medio
Profesor: Guillermo Pavez Bustamante

Práctica

1. Representa cada una de las siguientes multiplicaciones iteradas como una potencia de base entera:

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$

d) $0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 =$

b) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) =$

e) $-(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) =$

c) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} =$

2. Representa los siguientes números como potencias:

a) 8 =

h) -27 =

b) 25 =

i) 243 =

c) -36 =

j) -256 =

d) 49 =

k) 216 =

e) 625 =

l) 343 =

f) -32 =

m) 729 =

g) 125 =

3. Escribe cada potencia con exponente positivo:

a) $2^{-3} =$

e) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} =$

b) $5^{-10} =$

f) $(-4)^{-5} =$

c) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-4} =$

g) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-8} =$

d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} =$

4. Resuelve las siguientes potencias:

a) $3^3 =$

b) $-4^2 =$

c) $(-5)^3 =$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 =$

e) $\left(-\frac{1}{4}\right)^5 =$

f) $-\left(\frac{3}{2}\right)^2 =$

g) $5^{-3} =$

h) $-7^{-2} =$

i) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} =$

5. Encuentra el valor positivo de la base de la potencia en cada caso para que se cumpla la igualdad:

Ejemplo: $x^2 = 25$

Pregunta: ¿Qué número elevado a 2 da como resultado 25?

Respuesta: x = 5

Comprobación: $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

a) $x^2 = 49$

Pregunta:

Respuesta:

Comprobación:

b) $x^2 = 81$

Pregunta:

Respuesta:

Comprobación:

c) $x^3 = 64$

Pregunta:

Respuesta:

Comprobación:

d) $x^3 = 27$

Pregunta:

Respuesta:

Comprobación:

e) $x^5 = 32$

Pregunta:

Respuesta:

Comprobación:

f) $x^3 = -125$

Pregunta:

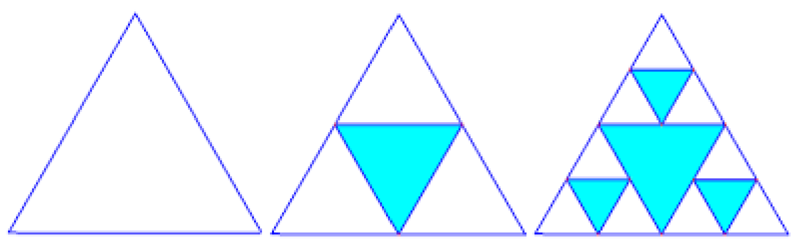
Respuesta:

Comprobación:

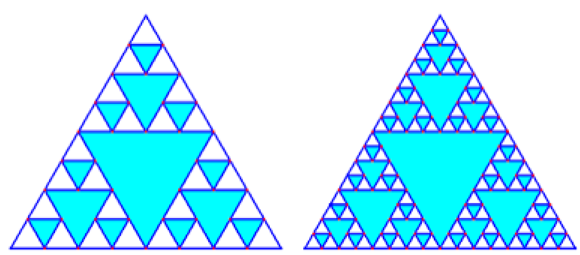
Desafío

El triángulo de Sierpinski es un fractal[1] que se construye a partir de cualquier triángulo. Se aplicará en este caso, a un triángulo equilátero uniendo los puntos medios de cada lado del triángulo original, formando 4 nuevos triángulos. En cada uno de los 3 triángulos blancos formados (ver imagen) se vuelve a repetir el proceso y así sucesivamente con los triángulos blancos que resulten cada vez que se aplica el proceso.

Llamaremos fase 1, 2, 3, … a las figuras resultantes luego de aplicar el proceso y fase 0 al triángulo original del cual se comenzó. En cada fase, el lado del triángulo se reduce a la mitad en los nuevos triángulos formados, es decir, a $\frac{1}{2}$ de su medida.



Fase 0 Fase 1 Fase 2



Fase 3 Fase 4

Fuente: http://sabrinamatematica.blogspot.com/2013/04/triangulo-de-sierpinski.html

Si el lado del triángulo equilátero en su fase 0 es de 1 unidad,

1. ¿Cuál es la medida del lado de los nuevos triángulos blancos formados en su fase 3?

2. ¿Puedes expresar el resultado como una potencia? ¿Cómo?

[1] Es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas.

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

OBJETIVO: Aplicar las propiedades de potencias.

Recordemos

En años anteriores has estudiado las propiedades de potencias separadas por conjuntos numéricos: potencias en los números naturales, enteros y racionales. Lo cierto es que las propiedades se utilizan por igual en cualquiera de ellos. A continuación, se presentan las propiedades con ejemplos en los distintos conjuntos numéricos:

POTENCIA DE EXPONENTE 0

Cuando el exponente de una potencia es 0, su resultado es 1 siempre cuando su base no sea 0.

Ejemplos:

$2^0 = 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

$(-3)^0 = 1$

POTENCIA DE EXPONENTE 1

Cuando el exponente de una potencia es 1, su resultado siempre es igual a la base.

Ejemplos:

$4^1 = 4$

$(-5)^1 = -5$

$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

MULTIPLICACIÓN DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

En la multiplicación de potencias de igual base se mantiene la base y se suman los exponentes.

Ejemplos:

$5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$

$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$

$(-2)^2 \cdot (-2)^3 = (-2)^{2+3} = (-2)^5$

MULTIPLICACIÓN DE POTENCIAS DE IGUAL EXPONENTE

En la multiplicación de potencias de igual exponente se multiplican las bases y se mantiene el exponente.

Ejemplos:

$$(-2)^3 \cdot 4^3 = (-2 \cdot 4)^3 = (-8)^3$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

DIVISIÓN DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

En la división de potencias de igual base se mantiene la base y se restan los exponentes.

Ejemplos:

$$3^2 \div 3^1 = 3^{2-1} = 3^1$$

$$\frac{6^4}{6^2} = 6^{4-2} = 6^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

DIVISIÓN DE POTENCIAS DE IGUAL EXPONENTE

En la división de potencias de igual base, se dividen las bases y se mantiene el exponente.

Ejemplos:

$$(-8)^2 \div 2^2 = (-8 \div 2)^2 = (-4)^2$$

$$\frac{5^3}{3^3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3$$

POTENCIA DE UNA POTENCIA

En la potencia de una potencia se mantiene la base y se multiplican los exponentes.

Ejemplos:

$$(3^2)^{-3} = 3^{2 \cdot (-3)} = 3^{-6}$$

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-8}$$

POTENCIA DE EXPONENTE NEGATIVO

Una potencia con exponente negativo es igual al inverso multiplicativo de la base con el exponente positivo.

Ejemplos:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

El inverso multiplicativo de 2 es $\frac{1}{2}$ ya que la multiplicación de estos factores da como resultado el neutro multiplicativo, es decir el 1.

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^{4}$$

$$(0{,}1)^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = 10^{2}$$

En resumen:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $a^n \div a^m = a^{n-m}$

  $o\ también\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $a^n \div b^n = (a \div b)^n$

  $o\ también\ \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Práctica

6. Aplica la propiedad de potencia correspondiente a cada caso:

a) $10^0 =$

b) $(-5)^1 =$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

d) $(4^3)^{-1} =$

e) $8^2 \cdot 8^4 =$

f) $4^3 \div 2^3 =$

g) $3^{-2} =$

h) $\frac{8^5}{4^2} =$

7. Aplica las propiedades de potencias para resolver:

a) $a \cdot a^3 \cdot a^5 =$

b) $\frac{27x^4y^3}{3x^3y^3} =$

c) $[(a^{-2})^{-4}]^3 =$

d) $\frac{a^2b^3a^5b^7}{(ab)^3b^2a} =$

e) $2^0 + 2^{-1} - 2^{-2} + 2^{-3} =$

g) $\frac{3^{-2} - 3^2}{3^2} =$

f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} =$

h) $\left(\frac{1}{2} \cdot x^{-4}\right)^{-2} =$

Desafío

a) Si $A = \frac{1}{2a}$, $B = \frac{1}{3a}$. Entonces $[A - A^{-1}B] \cdot A^{-1}$ es igual a:

b) Demuestra utilizando las propiedades de potencias que $2^0 = 1$